8. Скаларно произведение на два вектора

Нека **a** е вектор и l е единична ос с единичен вектор **e**. Взимаме произволен представител $\overrightarrow{AB}$ на **a** и прекарваме оста l' през , еднопосочно успоредна на l. Определен е ъгълът $\varphi \in [0, \pi]$ между оста l' и насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$. Този ъгъл ще наричаме ъгъл между вектора **a** и оста l. От правоъгълния триъгълник ABB' получаваме следната формула за ортогоналната проекция на вектора $\overrightarrow{AB}$ върху оста l:

$$\text{пр}_l \mathbf{a} = |\mathbf{a}| cos\varphi.$$

Дефиниция.1: Нека са дадени ненулевите вектори **a**,**b**. Да означим с $\varphi \in [0, \pi]$ ъгъла между тях. *Скаларно произведение* $<$**a**,**b**$>$ на ненулевите вектори **a**,**b** наричаме произведението от дължините им и косинуса на ъгъла φ, заключен между тях:

$$ab = |a||b| cos\varphi.$$

Скаларно произведение на нулевия вектор **0** с кой да е вектор по определение считаме числото 0. В сила са също така следните свойства:
1) комутативен закон: $<\mathbf{a},\mathbf{b}>=<\mathbf{b},\mathbf{a}>$;
2) дистрибутивен закон: $<\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}>=<\mathbf{a},\mathbf{b}>+<\mathbf{a},\mathbf{c}>$;
3) $< \lambda\ \mathbf{a},\mathbf{b}>=\lambda<\mathbf{a},\mathbf{b}>$;
4) $<\mathbf{a},\mathbf{a}>=a^2$, като равенство имаме когато $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.
Тук **a**,**b**,**c** са произволни вектори, а $\lambda \in \mathbb{R}$.
Скаларното произведение на вектори с горните свойства е скаларно произведение по смисъла на линейната алгебра. Линейното пространство на свободните вектори с въведено положително скаларно произведение, е Евклидово пространство по смисъла на ЛА.
Примери са правата, като едномерно Евклидово пространство и равнината като двумерно Евклидово пространство.

Теорема.1: Нека $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Тогава $<\mathbf{a},\mathbf{b}=\mathbf{0}>$, тогава и само тогава, когато $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
Доказателство:
$<\mathbf{a},\mathbf{b}>=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) \Leftrightarrow \cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
Нека е дадена ортонормирана кординатна система: $K = Oe_1e_2e_3$, $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$ и $e_1 \perp e_2 \perp e_3$.

Теорема.2: Нека спрямо K, векторите **a**,**b** имат съответо координати (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3). Тогава $<\mathbf{a},\mathbf{b}> = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Доказателсвто:

Нека $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Нека $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.

$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$.

Разглеждаме $\triangle\ OAB$: От косинусовата теорема следва:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}cos\varphi$$
$$|\overrightarrow{OA}|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2,$$
$$|\overrightarrow{OB}|^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2,$$
$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2,$$
$$<\mathbf{a},\mathbf{b}> = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{OA}^2| + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2},$$

като заместим получаваме $<\mathbf{a},\mathbf{b}> = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Тук φ е ъгъла между двата вектора.

От теорема.1 и теорема.2 следва, че ако $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $<\mathbf{a},\mathbf{b}> = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Също така, виждаме че:

$$cos\varphi = \frac{<\mathbf{a},\mathbf{b}>}{|a||b|} =$$
$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} + \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}}.$$

Твърдение: Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е произволна афинна координатна система. Нека $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$ са прозволни вектори с координати спрямо K. Тогава:

$$<\mathbf{a},\mathbf{b}> = \sum_{i,j}^{3} g_{ij}a_ib_j, \text{ където } g_{ij} = <e_i, e_j>.$$

Доказателство:

$\mathbf{a} = a_1e1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $\mathbf{b} = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$.

$<\mathbf{a},\mathbf{b}> = <a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3> =$

$= <a_1e_1, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3> + <a_2e_2, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3> + <a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3> =$

$= \sum_{i,j}^{3} <e_i, e_j> a_ib_j = \sum_{i,j}^{3} g_{ij}a_ib_j.$